# 高階微分における Leibniz 則

**Theorem.** (Leibniz 則) $n \in \mathbb{N}$ とする．$f, g$ が $A \subset \mathbb{R}$ 上で $n$ 階導関数が存在するとき, 積 $fg$ も $A$ 上で $n$ 階導関数が存在し

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

が成り立つ.

**Proof.** 数学的帰納法で示す.

(i) $n = 1$ のとき

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \sum_{k=0}^{1} f^{(k)}(x) g^{(1-k)}(x)$$

より成り立つ.

(ii) $n = m$ のとき等式が成り立つと仮定すると, $n = m + 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}^{(m+1)} &= \left( \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(k)}(x) g^{(m-k)}(x) \right)' \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left( f^{(k+1)}(x) g^{(m-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x) \right) \\
&= \left( f'(x) g^{(m)}(x) + f(x) g^{(m+1)}(x) \right) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} \left( f^{(k+1)}(x) g^{(m-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x) \right) \\
&\qquad\qquad + \left( f^{(m+1)}(x) g(x) + f^{(m)}(x) g'(x) \right) \\
&= \left( f'(x) g^{(m)}(x) + f(x) g^{(m+1)}(x) \right) + \sum_{k=2}^{m} \binom{m}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x) + \left( f^{(m+1)}(x) g(x) + f^{(m)}(x) g'(x) \right) \\
&= f(x) g^{(m+1)}(x) + \sum_{k=1}^{m} \left\{ \binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right\} f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x) + f^{(m+1)}(x) g(x)
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで

$$\begin{aligned}
\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} &= \frac{m!}{(k-1)!(m+1-k)!} + \frac{m!}{k!(m-k)!} \\
&= \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!} \left( \frac{1}{m+1-k} + \frac{1}{k} \right) \\
&= \frac{(m+1)!}{k!(m+1-k)!} \\
&= \binom{m+1}{k}
\end{aligned}$$

となるから上の式に代入すると

$$\begin{aligned}\{f(x)g(x)\}^{(m+1)} &= f(x)g^{(m+1)}(x) + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(m+1-k)}(x) + f^{(m+1)}(x)g(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(m+1-k)}(x)\end{aligned}$$

となるから, $n = m+1$ のときも成り立つことがわかる.

以上より, 数学的帰納法から示された. ■